

## 0.1 Model Category

現在、単に model category といった場合は MC5 は functorial factorization を要求するのが普通である。functorial factorization とはある morphism の分解の仕方を指定してあると考えればよい。

### Definition 0.1.1

$C$  を category としたとき、 $C$  の functorial factorization とは、2つの関手  $\alpha, \beta : \text{Mor}(C) \rightarrow \text{Mor}(C)$  による組  $(\alpha, \beta)$  で、任意の  $f \in \text{Mor}(C)$  に対し、 $\beta(f) \circ \alpha(f)$  が定義され  $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$  を満たすものである。

morphism のなす圏  $\text{Mor}(C)$  については各自思い出しておいてほしい。

### Definition 0.1.2

圏  $C$  がモデル圏とは、次の3種類の閉じた  $C$  の射、cofibration( $\hookrightarrow$ ) , fibration( $\twoheadrightarrow$ ) , weak equivalence( $\xrightarrow{\sim}$ ) および、さらに2組の functorial factorization の  $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$  が指定され、次の5つの条件を満たす。

MC1 (limits and colimits)

$C$  は任意の limit , colimit で閉じている。

MC2 (2-out-of-3)

$f, g : C$  の射で、 $g \circ f$  が存在するものとする。このとき、 $f, g, g \circ f$  のいずれか2つが weak equivalence ならば、残り一つも weak equivalence である。

MC3 (retract)

$f$  は  $g$  の retract であり、 $g$  が cofibration , fibration , weak equivalence のいずれからならば、 $f$  もそうである。

MC4 (lift)

acyclic fibration は cofibration に対し RLP をもつ。また、acyclic cofibration は fibration に対し LLP をもつ。

MC5 (functorial factorization)

任意の射  $f$  に対し、 $\alpha(f)$  は cofibration であり、 $\beta(f)$  は acyclic fibration。  $\gamma(f)$  は acyclic cofibration であり、 $\delta(f)$  は fibration である。

functorial とすることで morphism に対し、分解の仕方が指定されるので議論しやすい事がある。

### Lemma 0.1.3

$C$  がモデル圏とすると、

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

の可換図で  $f, g$  に MC5 を用いたとき、

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha(f)} & X & \xrightarrow{\beta(f)} & B \\ u \downarrow & & \vdots h \downarrow & & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{\alpha(g)} & Y & \xrightarrow{\beta(g)} & D \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\gamma(f)} & X' & \xrightarrow{\delta(f)} & B \\ u \downarrow & & \vdots h' \downarrow & & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{\gamma(g)} & Y' & \xrightarrow{\delta(g)} & D \end{array}$$

を可換にするような射が存在する。

proof)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha(g) \circ u} & Y \\ \alpha(f) \downarrow & & \downarrow \beta(g) \\ X & \xrightarrow{v \circ \beta(f)} & D \end{array}$$

の可換図で MC4 を用いると求める射が得られる。後半の主張も同じである。

□

### Definition 0.1.4

モデル圏  $C$  で、 $X \in C$  に対し、

$$\phi \longrightarrow X, X \longrightarrow *$$

を MC5 を用いて分解したとき、

$$\phi \hookrightarrow QX \xrightarrow{\sim} X, X \xrightarrow{\sim} RX \twoheadrightarrow *$$

と考へ、cofibrant な  $QX$  と fibrant な  $RX$  を得る。 $QX$  を  $X$  の cofibrant replacement とよび、 $RX$  を  $X$  の fibrant replacement と呼ぶ。

### Corollary 0.1.5

$f : X \longrightarrow Y$  に対し、

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{\tilde{f}} & QY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ RX & \xrightarrow{\bar{f}} & RY \end{array}$$

を可換にする morphism が left or right homotopy を除いて一意に存在する。そして、 $\tilde{f}(\bar{f})$  が weak equivalence と  $f$  が weak equivalence であることは同値である。さらに  $Y(X)$  が (co)fibrant ならば、 $\tilde{f}(\bar{f})$  の left or right homotopy 類は  $f$  の left(right)homotopy 類にのみ依存する。

proof) Lemma 0.1.3 により存在は確認できる。また、 $\tilde{f}$  と  $\tilde{f}' : QX \longrightarrow QY$  を条件を満たす morphism とする。このとき、 $p : QY \longrightarrow Y$  は acyclic fibration であるので、

$$p_{Y*} : \pi^l(QX, QY) \longrightarrow \pi^l(QX, Y)$$

は全単射であるので、 $p_*[\tilde{f}] = [f] = p_*[\tilde{f}']$  から、 $[\tilde{f}] = [\tilde{f}']$  であるので、 $\tilde{f} \stackrel{l}{\sim} \tilde{f}'$  である。ここで  $QX$  は cofibrant だから、 $\tilde{f} \stackrel{r}{\sim} \tilde{f}'$  でもある。weak equivalence については MC2 を考えればおのずとわかる。

また  $Y$  が fibrant で、 $f \stackrel{l}{\sim} g$  とする。このとき、

$$\pi^l(QX, X) \times \pi^l(X, Y) \longrightarrow \pi^l(QX, Y)$$

の写像が定義できるので、 $f \circ p_X \stackrel{l}{\sim} g \circ p_X$  である。 $p_Y \circ \tilde{f} \stackrel{l}{\sim} p_Y \circ \tilde{g}$  なので、 $p_{Y*}$  が全単射なので、同じく  $\tilde{f} \sim \tilde{g}$

□

### Corollary 0.1.6

$f = 1_X$  のとき、 $\tilde{f} \sim 1_{QX} : QX \longrightarrow QX$  であり、 $\widetilde{g \circ f} \sim \tilde{g} \circ \tilde{f}$  である。 $\bar{f}$  でも同様なことがいえる。

**Definition 0.1.7**

$C$  をモデル圏とすると、次のような圏が考えられる。

1.  $C_c$  を  $C$  の cofibrant object からなる  $C$  の sub category とする。
2.  $C_f$  を  $C$  の fibrant object からなる  $C$  の sub category とする。
3.  $C_{cf}$  を  $C$  の fibrant かつ cofibrant object からなる  $C$  の sub category とする。
4.  $\pi C_c$  を  $C$  の cofibrant object を object とし、morphism を right homotopy class で定義する。
5.  $\pi C_f$  を  $C$  の fibrant object を object とし、morphism を left homotopy class で定義する。
6.  $\pi C_{cf}$  を  $C$  の fibrant かつ cofibrant object を object とし、morphism を homotopy class で定義する。

**Remmark 0.1.8**

$Q : C \longrightarrow_{\pi} C_c$  を  $X \mapsto QX$ 、 $f \mapsto \tilde{f}$  で定義すればこれは関手。同様に、 $R : C \longrightarrow_{\pi} C_f$  を  $X \mapsto RX$ 、 $f \mapsto \bar{f}$  で定義すればこれは関手。

**Lemma 0.1.9**

$Q : C \longrightarrow_{\pi} C_c$  の制限、 $Q|_{C_f} : C_f \longrightarrow_{\pi} C_c$  から、 $Q' :_{\pi} C_f \longrightarrow_{\pi} C_{cf}$  が誘導できる。また、 $R : C \longrightarrow_{\pi} C_f$  の  $C_c$  への制限から  $R' :_{\pi} C_c \longrightarrow_{\pi} C_{cf}$  が誘導される。

proof) まず  $X : \text{fibrant}$  したとき、 $QX$  は fibrant かつ cofibrant であることは簡単にわかる。また、 $[f] = [g] \in_{\pi} C_f$  とする、つまり、 $f \sim g$  とする。このとき、fibrant object 内で考えれば、 $f \sim g$  であり、Cor 0.1.5 を考えれば、 $\tilde{f} \sim \tilde{g}$  である。 $R'$  についても同様である。

**Definition 0.1.10**

モデル圏  $C$  の homotopy category である  $\text{Ho}(C)$  とは、 $C$  と同じ object を持ち、

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(X, Y) = \text{Hom}_{\pi C_{cf}}(R'QX, R'QY) = \pi(RQX, RQY)$$

で定義する。また関手  $\gamma : C \longrightarrow \text{Ho}(C)$  が  $\gamma(X) = X$ 、 $\gamma(f) = RQ(f)$  で定義される。

**Proposition 0.1.11**

$C$  をモデル圏とする。 $\gamma : C \longrightarrow \text{Ho}(C)$  に対し、 $f : \text{weak equivalence}$  であることと、 $\gamma(f)$  が同型であることは同値である。

proof)  $f$  を weak equivalence とする。このとき、

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{Qf} & QY \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

の可換図で MC2 により、 $Qf : QX \longrightarrow QY$  は weak equivalence である。

$$\begin{array}{ccc} QX & \xrightarrow{Qf} & QY \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ R'QX & \xrightarrow{R'Qf} & R'QY \end{array}$$

であるから  $R'Qf : R'QX \longrightarrow R'QY$  も weak equivalence である。fibrant かつ cofibrant な object 間の weak equivalence は homotopy equivalence と同値である。よって  $\gamma(f)$  は同型である。

逆に  $\gamma(f)$  を同型とすれば今の証明を逆にたどる事ができる。

□

**Remmark 0.1.12**

$X, Y$  がともに fibrant かつ cofibrant ならば、

$$\gamma : \text{Hom}_C(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(X, Y)$$

は全射であり、同型

$$\tilde{\gamma} : \pi(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(X, Y)$$

を誘導する。

proof) fibrant かつ cofibrant な object の  $X$  に対しては、 $RQX = X$  であるので  $\gamma$  が全射であることがわかり、同型

$$\tilde{\gamma} : \pi(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(X, Y)$$

を誘導する。

□

### Lemma 0.1.13

$\text{Ho}(C)$  の morphism は、 $C$  の morphism である  $g$  に対する  $\gamma(g)$  と、 $C$  の weak equivalence である  $h$  に対する  $\gamma(h)^{-1}$  の合成により表される。

$X$  を  $C$  の object とする。このとき、

$$QX \xrightarrow{p_X} X, \quad QX \xrightarrow{i_{QX}} RQX$$

はそれぞれ weak equivalence であるから、Prop 0.1.11 より

$$\gamma(i_{QX}) \circ \gamma(p_X)^{-1} : X \longrightarrow RQX$$

は  $\text{Ho}(C)$  における同型である。

$f \in \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(X, Y) = \pi(ROX, RQY)$  を考えると、 $f$  の代表元を、 $f' : RQX \longrightarrow RQY$  とする。このとき、 $f$  は

$$f = \gamma(p_Y) \circ \gamma(i_{QY})^{-1} \circ \gamma(f') \circ \gamma(i_{QX}) \circ \gamma(p_X)^{-1}$$

という具合に分解される。

□

### Corollary 0.1.14

$F, G : \text{Ho}(C) \longrightarrow D$  を関手とし、 $t : F \circ \gamma \longrightarrow G \circ \gamma$  を自然変換としたとき、 $t$  は自然変換  $F \longrightarrow G$  を導く。

proof)  $\gamma$  は object は変えないので、

$$t_X : F(X) = F \circ \gamma(X) \longrightarrow G \circ \gamma(X) = G(X)$$

をそのまま考える。このとき、 $f \in \text{Hom}_{\text{Ho}(C)}(X, Y)$  に対し、図式の可換を示せばよい。Lemma 0.1.13 により、 $f$  は  $\gamma$  の像により分解できるので、 $t : F \circ \gamma \longrightarrow G \circ \gamma$  が natural の仮定から題意が示せる。

□

**Lemma 0.1.15**

$C$  : model category で、 $F : C \longrightarrow D$  を functor は、 $f$  : weak equivalence に対し、 $F(f)$  は  $D$  における同型射になるとする。このとき、 $f \stackrel{l}{\sim} g$  or  $f \stackrel{r}{\sim} g$  ならば、 $F(f) = F(g)$  である。

proof)  $f \stackrel{l}{\sim} g$  とする。この left homotopy

$$H : A \wedge I \longrightarrow X$$

を選ぶ。

$$A \coprod A \xrightarrow{i_0+i_1} A \wedge I \xrightarrow{p} A$$

の分解があり、 $p$  は weak equivalence である。また、 $p \circ i_0 = p \circ i_1 = 1$  なので、

$$F(p) \circ F(i_0) = F(p) \circ F(i_1)$$

である。ここで  $F(p)$  は同型だから、 $F(i_0) = F(i_1)$  である。よって、

$$F(f) = F(H \circ i_0) = F(H) \circ F(i_0) = F(H) \circ F(i_1) = F(H \circ i_1) = F(g)$$

□